Идентификация систем в классе моделей регрессии с использованием регуляризации

Губарев В.Ф., Сальников Н.Н., Мельничук С.В.
Институт космических исследований НАНУ-ГКАУ
Киев, Украина
v.f.gubarev@gmail.comdu

Аннотация—Модели регрессии являются востребованны-ми при идентификации систем, для которых получить ее модель можно только через идентификацию. При больших размерностях объекта, плохой идентифицируемости и близ-ких собственных значениях задача идентификации может стать некорректно поставленной. В работе предложены и исследованы методы решения таких задач с использованием регуляризации. В качестве регуляризирующего параметра рассматривается размерность модели. Регуляризированные решения, получаемые этими методами, в корректном случае совпадают с классическими.

Ключевые слова—идентификация, модель регрессии, регуляризация, сингулярное разложение, аппроксимация информационных матриц.

I. Введение

Уравнения регрессии являются весьма распространен-ными при моделировании различных систем с дискрет-ными процессами или дискретным входом и выходом. Таковые рассматриваются, например, в медицине, техни-ческих и организационных системах и многих других. Характерным является то, что для них нет других спосо-бов построения моделей кроме идентификации. При этом в большинстве случаев возможно только приближенное их описание, поскольку даже при больших размерностях уравнений регрессии точного описания в силу разных причин может не существовать. Именно поэтому прихо-дится решать задачу структурно-параметрической иден-тификации, в результате чего находится приближенная модель. Наиболее продвинутыми и в достаточной мере иссле-дованными являются методы стохастической идентифи-кации, в том числе в классе моделей регрессии, см., например, [1–6]. Уравнения регрессии в сравнении с другими классами моделей систем позволяют в явной форме учитывать не только погрешности измерения, т.е. на выходе, но и действующие на входе возмущения. В результате возникло направление идентификации, получившее название иден-тификация систем с ошибками в переменных (в англо-язычной литературе трактуется как errors-in-variables (EIV) identification) [7]. В данной работе рассматривается нестохастический подход, когда о погрешностях известно только, что они являются априори неизвестными случайными последова-тельностями, принадлежащими ограниченным множествам.

II. Постановка задачи

Для лучшего представления предлагаемого подхода ограничимся рассмотрением динамических систем с одним входом и одним выходом, описываемых следующим уравнением

$$\begin{aligned} & y(t) + a_1\, y(t-1) + \cdots + a_n\, y(t-n) = \\ & = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \cdots\ b_n u(t-n). \end{aligned}$$

Класс моделей линейной регрессии для них запишем в виде

$$y(t) = \varphi'(t)\cdot\theta, \qquad (1)$$

где
$\varphi'(t) = [u(t)\ \ y(t-1)\ \ u(t-1)\cdots y(t-n)\ \ u(t-n)]$ – регрессор, а $\theta' = [b_0\ \ -a_1\ \ b_1\ \cdots\ -a_n\ \ b_n]$ – параметры модели. «$'$» – операция транспонирования.

Задача идентификации системы в классе моделей (1) решается как структурно-параметрическая, что означает определение размерности n и соответствующего ей вектора θ. Исходными данными являются полученные из экспериментов временные ряды $\{\tilde{u}(t),\ \ \tilde{y}(t)\}$, заданные на интервале $[t_0,\ \ T]$. Эти данные неточные, т.е. содержат погрешность, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} & \tilde{u}(t) = u(t) + \xi_u(t),\ \tilde{y}(t) = y(t) + \xi_y(t), \\ & |\xi_u(t)| \le \varepsilon_u, \left|\xi_y(t)\right| \le \varepsilon_y,,\ t = t_0,\ t_0+1,\ \cdots, \qquad (2) \end{aligned}$$

где $u(t)$, $y(t)$ – точные значения, $\xi_u(t)$, $\xi_y(t)$ – аддитивные погрешности, а ε_u и ε_y достаточно малые величины по отношению к точным сигналам. Когда поставленная задача некорректна, будет находиться приближенное регуляризированное решение, согласованное по точности с погрешностями. В качестве регуляризирующего параметра рассматривается размерность n.

III. Метод идентификации с регуляризацией

Метод решения должен согласно теории регуляризации удовлетворять требованию его применимости, как в корректном, так и в некорректном случаях. Это означает, что решение в корректном случае должно совпадать с классическим, т.е. иметь точную размерность и быть состоятельным.

Определение размерности модели. Исходные данные на интервале $[t_0,\ T]$ представляются как $T-t_0=l+N-1$, где l больше предполагаемой размерности модели n и обозначим $t_{0,l}=t_0+l$. Из имеющихся данных формируем ганкелеву матрицу $\Phi\left(l,N\right)=\left[\tilde{\varphi}\left(t_{0,l}\right)\ \ \tilde{\varphi}\left(t_{0,l}+1\right)\ \cdots\ \ \tilde{\varphi}\left(T\right)\right]$ (3) где $\tilde{\varphi}\left(t_{0,l}+i\right)$ – вектор-столбцы регрессоров с учетом погрешности, формируемых согласно (1). Тогда сдвиговая инвариантность позволяет записать следующую систему уравнений, вытекающую из (1): $\theta'\cdot\Phi\left(l,N\right)=\varphi_0{}'$ (4) где $\varphi_0{}'$ – вектор-строка вида $\varphi_0=\left[\tilde{y}\left(t_{0,l}\right)\ \ \tilde{y}\left(t_{0,l}+1\right)\ \cdots\ \ \tilde{y}\left(T\right)\right]$.

Составим для (4) информационную матрицу $\Phi=\begin{bmatrix}\varphi'_0\\ \Phi\left(l,N\right)\end{bmatrix}$ которую транспонируем и с помощью SVD-разложения представим в виде $\Phi=U\Sigma V'$, где U и V – квадратные ортогональные матрицы соответствующих размерностей, а Σ – матрица сингулярных чисел, расположенных на диагонали.

Запишем Φ' в виде следующего блочного представления

$$\Phi'=U\Sigma V'=U_s\Sigma_s V'_s+U_e\Sigma_e V'_e=\Phi'_s+\Phi'_e, \qquad (5)$$

где $U=\left[U_s\ \ U_e\right]$,, $\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_{\mathrm{s}} & 0\\ 0 & \Sigma_e\end{bmatrix}$, $V=\left[V_s\ \ V_e\right]$.

В (5) индекс «s» соответствует сигнальному пространству, а «e» возмущениям и модам со слабым сигналом, для которых отношение сигнал/шум (ОСШ) небольшое. Если данные точные, то $\Sigma_e\equiv 0$. При малых погрешностях матрица Σ полноранговая, но с малыми сингулярными числами матрицы Σ_e. Это свойство и будет использовано для нахождения размерности модели n, т.е. подходящего разбиения (5).

Сформулируем три правила, по которым будем определять n.

Правило 1. Варьируем n в (5) и проверяем выполнимость неравенства

$$\left|\Phi'_e\right|\le E\left(\varepsilon_u,\varepsilon_y\right) \qquad (6)$$

где $\left|\Phi_e{}'\right|$ – матрица абсолютных значений, а E – матрица той же размерности, что и $\left|\Phi_e{}'\right|$, у которой вместо $\tilde{u}\left(t\right)$ и $\tilde{y}\left(t\right)$ стоят значения ε_u и ε_y (2), соответственно. Наименьшее n, при котором (6) выполняется, принимается за искомую размерность модели.

Правило 2. Строим график зависимости от n числа элементов $\left|\Phi_e{}'\right|$ (относительное или в процентах), для которых (6) выполняется. То значение n, начиная с которого эти показатели практически не изменяются, принимаем за искомую размерность.

Правило 3. Строим график зависимости от n значения абсолютной величины максимального элемента $\left|\Phi_e{}'\right|$. Значение n, при котором оно выходит на насыщение, и есть искомая размерность.

IV. Параметрическая идентификация

После установления размерности приближенной модели решается стандартная задача параметрической идентификации. Ее решение можно найти хорошо известными методами, которые используются при стохастической идентификации. В данной работе рассмотрены некоторые их модификации с учетом того, что у матрицы , которая для этого используется, имеем . Предложены схемы, которые позволяют дополнительно судить об устойчивости получаемого решения к реализуемым в экспериментах данных и в случае его неприемлемости скорректировать размерность модели в сторону уменьшения.

Список литературы

[1] Hong M. Accuracy analysis of bias-eliminating least square estimates for error-in-variables identification / M. Hong, T. Soderstrom, W.X. Zheng // Automatica. – 2007. – vol. 43, is. 9. – P. 1590-1596.

[2] Soderstrom T. Accuracy analysis of the Frisch scheme for identifying error-in-variables systems // IEEE Transaction on Automatic Control. – 2007. – vol. 52, is. 6. – P. 985-997..

[3] Soderstrom T. Error-in-variables methods in system identifica-tion // Automatica. – 2007. – vol. 43, is. 6. – P. 939-958.

[4] Soderstrom T. Error-in-variables methods in system identifica-tion. – Cham, Springer, 2018. – 485 p.

[5] Kleiberg D. Error-in-variables system identification using structural equation modelling / D. Kleiberg, T. Soderstrom, F. Yang-Wallentin // Automatica. – 2016. – vol. 66, is. 4. – P. 218-230.

[6] Zhang E. Identification of multivariable dynamic error-in-variables system with arbitrary input / E. Zhang, R. Pintelor // Automatica. – 2017. – vol. 82, is. 8. – P. 69-78.

[7] Kang H. A graph subspace approach to system identification based on error-in-variables system models / H. Kang, G. Gu, W.X. Zheng // Automatica. – 2019. – vol. 109, is. 11. – P. 108535.