Метод верхньої та нижньої розв'язуючих функцій для диференціальних ігор зближення з чистим запізненням

Л.В. Барановська
КПІ ім. Ігоря Сікорського
Київ, Україна
lesia@baranovsky.org

Анотація—Розглядається модифікація методу розв'язуючих функцій для диференціально-різницевих ігор зближення з чистим запіз-ненням. Для даного класу ігор введено нижню і верхню розв'язуючі функції різних типів. Для локальної задачі зближення побудовано схему методу, сформульовано достат-ні умови завершення гри.

Ключові слова–диференциально-різницеві ігри, диференціальни ігри, динамічні ігри, ігри зближення, теорія ігор.

Вступ

Розглядаються диференціально-різницеві ігри зближення з чистим запізненням. Для одержання гарантованого результату використовується метод розв'язуючих функцій [1]. Схема методу для диференціально-різницевих ігор розроблена в роботах [2,3,4]. У роботах [5,6,7] розглянуто задачу зближення для групи переслідувачів та одного втікача. Схему методу розв'язуючих функцій для диференціально-різницевих систем нейтрального типу розроблено у роботі [8]. Для об'єктів з різною інерційністю у роботі [9] запропоновано модифікацію умови Понтрягіна за рахунок введення тілесної частини термінальної множини. У даній роботі введено верхні та нижні розв'язуючі функції різних типів [10] у схемі методу розв'язуючих функцій для диференціальної гри зближення з чистим запізненням, що дозволяє розвивати метод навіть якщо умова Понтрягіна не виконується. Одержано достатні умови для завершення гри.

Схема методу

Нехай рух керованого об'єкту в евклідовому просторі R^n описується системою диференціально-різницевих рівнянь з чистими запізненням $\tau = const > 0$:

$$\dot{z}(t) = Bz(t-\tau) + u(t) - v(t)$$
$$z \in R^n,\ u \in U,\ v \in V. \tag{1}$$

Тут B – стала квадратна матриця порядку n; U, V – непорожні компакти; функція $\varphi : U \times V \to R^n$ неперервна за сукупністю змінних; u, v – параметри керування переслідувача і втікача відповідно.

Початковим станом системи (1) є дійсна функція

$$z(t) = z^0(t), -\tau \le t \le 0, \tag{2}$$

$z^0(t)$ абсолютно неперервна на $[-\tau, 0]$.

Термінальна множина є циліндричною і має вигляд

$$M^* = M_0 + M, \tag{3}$$

де M_0–лінійний підпростір з R^n, M – непорожній компакт з ортогонального доповнення L до M_0 у просторі R^n.

Ціль переслідувача (u) – вивести траєкторію процесу на термінальну множину (3) за найкоротший час, ціль втікача (v) – ухилитися від зустрічі або максимально відтягнути цей час. Приймемо сторону втікача, при цьому критерієм якості у грі є час. Тоді керування втікача в момент t будемо будувати у вигляді вимірної функції

$$u(t) = u(z^0(.), v_t(\cdot)), u(t) \in U, t \in [0, T], \tag{4}$$

$v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t]\}$; або у вигляді контркерування $u(t) = u(z^0(.), v(t)), u(t) \in U, t \in [0, T]$.

Нехай $\Delta = \{(t, s) : 0 \le s \le t < +\infty\}$ – плоский конус, π – ортопроектор, який діє з R^n в L.

Розглянемо наступне багатозначне відображення

$$W(t, s, v) = \pi K(t, s)\varphi(U, v)$$

на множині $\Delta \times V$ і

$$W(t, s) = \bigcap_{v \in V} W(t, s, v),\ 0 \le s \le t < +\infty,$$

де $K(t, s)$ – фундаментальна матриця [11].

Позначимо $domW = \{(t, s) \in \Delta : W(t, s) \neq \varnothing\}$.

Умова Понтрягіна. $domW = \Delta$.

Умова 1. Відображення $W(t, s, v)$ замкнутозначне на прямому добутку конуса Δ і компакта V.

Назвемо $\gamma(t, s)$, $\gamma : \Delta \to L$, функцією зсуву. Вона майже скрізь обмежена і вимірна по t, інтегровна по s, $s \in [0, t]$ для кожного $t \in R_+$.

Позначимо

$$\xi(t) = \xi(t, z^0(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi K(t) z^0(0) +$$
$$+ \int_{-\tau}^{0} \pi K(t - s - \tau) B z^0(s) ds + \int_{0}^{t} \gamma(t, s) ds.$$

Розглянемо багатозначне відображення

$$Res(t, s, v) =$$

$$= \{\alpha \ge 0 : [\pi K(t,s)\varphi(u,v) - \gamma(t,s)] \bigcap \alpha[M - \xi(t)] \ne \varnothing\},$$

$$Res : \Delta \times V \to 2^{R_+}.$$

Позначимо

$$Res(t,s) = \bigcap_{v \in V} Res(t,s,v),\ (t,s) \in \Delta.$$

Умова 2. Багатозначне відображення $Res(t,s)$ має непорожні образи на конусі Δ.

Введемо верхню та нижню розв'язуючі функції [10]

$$\alpha^*(t,s) = sup\{\alpha : \alpha \in Res(t,s)\},$$

$$\alpha_*(t,s) = inf\{\alpha : \alpha \in Res(t,s)\},$$

а також числові функції

$$\alpha^*(t) = \int_0^t \alpha^*(t,s)ds,$$

$$\alpha_*(t) = \int_0^t \alpha_*(t,s)ds.$$

Верхній розв'язуючій функції $\alpha^*(t,s,v)$, яка змістовно означає максимальний виграш переслідувача в момент s у грі на інтервалі $[0,t]$ при протидії v, поставимо у відповідність множину

$$T(z^0(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \{t > 0 : \inf_{v(\cdot)\in V(\cdot)} \int_0^t \alpha^*(t,s,v(s))ds \ge 1\} \quad (5)$$

і його найменший елемент

$$t(z^0(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = inf\{t : t \in T(z^0(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\}.$$

Якщо для деякого t, $t > 0$, $\alpha^*(t,s,v) \equiv +\infty$, $s \in [0,t]$, $v \in V$, то в цьому випадку значення інтеграла у співвідношенні (5) природньо покласти рівним $+\infty$, а відповідна нерівність виконується автоматично і $t \in T(z^0(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. У випадку, коли нерівність в (5) не виконується при всіх $t > 0$, покладемо $T(z^0(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$, тоді, відповідно, $t(z^0(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = +\infty$.

Теорема. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) виконуються умови 1 і 2, $M = coM$; для заданої функції $z^0(\cdot)$ і функції зсуву $\gamma(\cdot,\cdot)$ $T(z^0(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \ne \varnothing$.

Тоді при $\alpha_*(T) < 1$ траєкторія процесу (1) може бути приведена на термінальну множину (3) в момент T за допомогою керування у вигляді (4); а за умови $\alpha^*(T) \ge 1$ – в классі контркерування, при будь-яких допустимих протидіях втікача.

Висновки

У даній роботі побудовано схему методу розв'язуючих функцій для диференціально-різницевих ігор зближення з чистим запізненням. Уперше введено для таких задач верхню і нижню розв'язуючі функції, що дозволяє використовувати побудовану схему методу до процесів, у яких не виконується умова Понтрягіна. Сам вибір методу розв'язуючих функцій А.О. Чикрія зумовлений легкістю знаходження розв'язуючих функцій та практичною реалізацією. Метод дає обґрунтування класичному правилу паралельного переслідування, добре відомого проектувальникам ракетної та космічної техніки. Основна складність таких ігор полягає у знаходженні фундаментальної матриці диференціально-різницевих систем. Для подальшого розвитку запропонованого методу планується використовувати поняття запізнюючого експоненціалу [2, 3, 4] для практичного знаходження фундаментальної матриці системи у вигляді степеневого ряду. Також планується перенести цю схему методу для розв'язання групових задач зближення [12, 13], а також на випадок відмови керуючих пристроїв [14].

Література

[1] Chikrii A.A. Conflict-Controlled Processes. – Springer Science &Business Media, 2013. – 404 p.

[2] Baranovska L.V. Quasi-Linear Differential-Deference Game of Approach // Understanding Complex Systems. – 2019. – P. 505-524.

[3] Baranovska L.V. On Quasilinear Differential-Difference Games of Approach // Journal of Automation and Information Sciences. – 2017. – vol. 49, is. 8. – P. 53-67.

[4] Lesia V. Baranovska. Pursuit differential-difference games with pure time-lag // Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B. – 2019. – vol. 24, is. 3. – P. 1021-1031.

[5] Baranovskaya G.G. Group Pursuit in Quasilinear Differential-Difference Games / G.G. Baranovskaya, L.V. Baranovskaya // Journal of Automation and Information Sciences. – 1997. – vol. 29, is. 1.

[6] Baranovskaya L.V. Inverse Minkowski functionals in a nonstationary problem of group pursuit / L.V. Baranovskaya, A.A. Chikrij, Al.A. Chikrij // Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya. – 1997.

[7] Baranovskaya L.V. Inverse Minkowski functional in a nonstationary problem of group pursuit / L.V. Baranovskaya, A.A. Chikrii, Al.A. Chikrii // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 1997. – vol. 36, is. 1. – P. 101-106.

[8] Baranovskaya L.V. A method of resolving functions for one class of pursuit problems / L.V. Baranovskaya // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2015. – vol. 2, is 4(74). – P. 4-8.

[9] Baranovska L.V. Method of resolving functions for the differential-difference pursuit game for different-inertia objects / L.V. Baranovska // Advances in Dynamical Systems and Control. – Springer. – 2016. – vol. 69 of the series Studies in Systems, Decision and Control.

[10] Chikrii A.A. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control / A.A. Chikrii, V.K. Chikriy // Journal of Automation and Information Sciences. – 2016. – vol. 48, is. 1. – P. 20-35.

[11] Беллман Р. Дифференциально-разностные уравнения. / Р. Беллман, К. Кук. – М.: Мир, 1967. – 254с.

[12] Baranovska L.V. Group Pursuit Differential Games with Pure Time-Lag // Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics.– 2020.

[13] Барановская Л.В. О дифференциально-разностной игре группового преследования / Л.В. Барановская, Г.Г. Барановская // Доповіді Національної академії наук України. – 1997. – №3. – С. 12-15.

[14] Chikriy A.A. An approach game problem under the failure of controlling devices / A.A. Chikriy, L.V. Baranovskaya, Al.A. Chikriy // Journal of Automation and Information Sciences. – 2000. – vol. 32, is.5.