Об одном нелинейном интегральном неравенстве в задачах избегания столкновений

Югай Л.П.
Филиал НИТУ "МИСиС"
г.Алмалык, Узбекистан
yugailp@mail.ru

Аннотация—Рассматриваются вопросы приложений интегральных неравенств к задачам избегания столкновений в теории дифференциальных игр в постановке Л.С.Понтрягина – Е.Ф.Мищенко. Задача избегания столкновений (уклонения траекторий управляемых динамических систем, убегания одного объекта от другого и др.) рассматривается для нелинейных конфликтно управляемых динамических систем. При решении таких задач важную роль играет получение оценки снизу для расстояния от текущей фазовой точки траектории до заданного терминального множества. Как правило, оценка основана на решении некоторого нелинейного интегрального неравенства. Для таких неравенств получены новые оценки.

Ключевые слова–интегральное неравенство, траектория, управление, оценка решения.

Введение

Интегральные неравенства широко применяются в теориях дифференциальных уравнений, нелинейных колебаний, устойчивости, а также в механике и задачах усреднения. С их помощью доказывают теоремы единственности решений дифференциальных уравнений, выявляют их асимптотическое поведение и находят приближенные оценки решений дифференциальных уравнений, не выражающихся в квадратурах.

Имеют место приложения интегральных неравенств и в теории конфликтно управляемых процессов (дифференциальных играх) [1-5], существенную часть которой составляют нелинейные задачи избегания столкновений. Решение этих задач осуществимо, если удается получить эффективную нижнюю оценку расстояния от текущей фазовой точки траектории до заданного терминального множества.

В свою очередь, эти оценки в нелинейных задачах получаются только на основе использования нелинейных интегральных неравенств различного типа.

В данной работе исследуется нелинейное интегральное неравенство, решение которого применимо к нелинейным задачам избегания столкновений. Обзоры результатов по интегральным неравенствам и дифференциальным играм можно найти можно найти в [5,6].

Основной результат

Теорема 1 (основной результат). Пусть функция $u(t)$ непрерывна при $t_0 \le t \le t_0+1$ и удовлетворяет нелинейному интегральному неравенству

$$0 \le u(t) \le f(t) + \int_{t_0}^{t}\left[a(s)+b(s)u(s)+\sum_{i=1}^{n} c_i(s)u^{\alpha_i}(s)\right]ds, \qquad (1)$$

в котором все функции $f(t),\ a(t),\ b(t)$ и $c_i(t)$ – заданы, неотрицательны, не равны тождественно нулю и интегрируемы на отрезке $[t_0,\ t_0{+}1]$,$t_0 \ge 0,\quad 0<\alpha<1$.

Тогда найдется такая константа $h_0 \in (t_0,\ t_0+1]$, что для функции $u(t)$ при всех $t \in [t_0; t_0+h_0]$ выполняется неравенство

$$u(t) \le f(t) + \int_{t_0}^{t} a(s)\,ds + \delta\xi_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_0^{\alpha_i} g_i(t), \qquad (2)$$

где ξ_0 – положительный корень уравнения

$$\xi - \sum_{i=1}^{n} d_i \xi^{\alpha_i} - d_{n+1} = 0, \qquad (3)$$

$$g_i(t) = \left(\int_{t_0}^{t} c_i^{\frac{1}{1-\alpha_i}}(s)\,ds\right)^{1-\alpha_i},$$

а константы $\delta, h_0, b_1, d_i, i=1,2,\dots,n+1,$ – положительны и вычисляются эффективно через заданные в (1) функции и параметр $\alpha \in (0;1)$.

Доказательство Теоремы 1 основано на идеях [6-8].

Сравнение результатов

1) Если в (1) считать $n=1, \alpha_1=0$ или $\alpha_1=1$ или $c_1(t)\equiv 0, t \ge t_0$, то каждый случай приводит к хорошо изученным линейным интегральным неравенствам и оценкам типа Гронуолла-Беллмана [6].
2) Случай, когда в (1) $n=1,\ a(t)\equiv 0,\ f(t)\equiv f_0 \ge 0$ – константа, $t \ge t_0,\ \alpha_1 \ge 0$, изучен в [6-7] (при $\alpha_1 \ne 0$ или $\alpha_1 \ne 1$ – нелинейный случай).
3) Случай, когда в (1) $n=1,\ a(t)\equiv 0,\ b(t)\equiv 0,\ 0\le t\le 1,\ 0<\alpha_1<1$ исследован в [7-8].

4) Теорема 1 содержит также случаи, отличные от указанных в пп.1-3.

Замечание 1. Во многих работах в качестве подынтегральной функции в (1) рассматривается более общая функция, обладающие свойством монотонности по переменной $u(\cdot)$ (оцениваемой функции) и некоторыми другими дополнительными условиями. В результате получаются общие оценки в терминах обратных функций или отображений [6], которые неконструктивны и не приспособлены к исследованию задач избегания столкновений.

Замечание 2. Неравенство (2) и, особенно, вычисление h_0, важны для получения оценки расстояния от движущейся точки траектории нелинейной управляемой динамической системы до заданного терминального множества [3,4,9].

Замечание 3. Вопрос об алгоритме приближенного вычисления корня ξ_0 трансцендентного уравнения (3) рассмотрен при $n=1$ в [7-8].

Список литературы

[1] Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача убегания одного управляемого объекта от другого// ДАН СССР. -1969.-189, №4. –С. 721-723.

[2] Красовский Н.Н. Позиционные дифференциальные игры/ Красовский Н.Н., Субботин А.И. – М.: Наука, 1974. 496 с.

[3] Пшеничный Б.Н. Дифференциальные игры / Пшеничный Б.Н, Остапенко В.В. Киев: Наукова Думка, 1992. 264 с.

[4] Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы/ Чикрий А.А. Киев: Наукова Думка. 1992. 384 с.

[5] Чикрий А.А. Конфликтные ситуации при участии групп управляемых объектов.I. Избежание столкновений /Чикрий А.А.// Проблемы управления и информатики. Киев: ИК НАН Украины им. В.М. Глушкова. 2020, №4 – с.8

[6] Bainov D. Integral Inequalities and Applications/ Bainov D.and Simeonov P. Dordrecht Dordrecht, Springer (Mathematics and its Applications (East European Series),vol.57), 1992. 256 p..

[7] Martynyuk, A.A. Integral inequalities and stability of motion/Martynyuk, A.A. and Gutowski, R. Kiev: Naukova Dumka. 1979 (In Russian).

[8] Гамидов Ш.Г. Некоторые интегральные неравенства для краевых задач дифференциальных уравнений/ Гамидов Ш.Г.// Дифференциальные уравнения. 1969. Т.5. С. 463-472.

[9] Югай Л.П. Уклонение от дискретного терминального множества при геометрических ограничениях на управления/Югай Л.П.// Проблемы управления и информатики. Киев: ИК НАН Украины им. В.М. Глушкова. 1998, №1. - С.4-11.