Оптимальне керування інтегро-диференціальними системами гіперболічного типу

Анікушин А.В., Живолович О.Є.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
м. Київ, Україна
anik_andrii@ukr.net

Анотація—У роботі розглянуто інтегро-диференціальний оператор з інтегральним доданком типу Вольтерра. Отримано апріорні нерівності в негативних нормах у деякій спеціальній трійці просторів. На основі апріорних нерівностей показано існування та єдиність (слабкого) узагальненого розв'язку відповідної початково-крайової задачі. Наведено теорему про існування оптимального керування.

Ключові слова– інтегро-диференціальне рівняння, узагальнена розв'язність, оптимальне керування, апріорні нерівності, оператор Вольтерра.

Вступ

У обмеженій циліндричній просторово-часовій області розглянемо початково-крайову задачу Діріхле для гіперболічного диференціального рівняння

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f,$$

де оператор A не залежить від змінної t і задається еліптичним диференціальним виразом другого порядку. У роботі [1] для такого оператору вказаної задачі було отримано апріорні оцінки в негативних нормах у деякій шкалі просторів H^k, S^k, V^k і доведено коректність постановки відповідної початково-крайової задачі.

Після цього у статті [2] було встановлено аналогічні теореми узагальненої розв'язності для інтегро-диференціального рівняння

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au + Bu = f.$$

Тут оператор B є інтегральним оператором Вольтерра спеціального вигляду. У цитованій роботі нові оцінки для інтегральної частини Bu було доведено лише для фіксованої трійки просторів S^0, V^1, H^1.

У роботі [3] було показано як розширити результати, отримані у [2] на нову трійку просторів S^1, V^0, H^2. Відзначимо, що для того аби застосувати підхід з [3] потрібно модифікувати доведення апріорних нерівностей в негативних нормах для диференціальної частини оператора з [1].

У нашій роботі ми розглядаємо іншу трійку просторів з [1] і використовуючи підхід, що аналогічний до [3], доводимо апріорні нерівності в новій трійці. Як результат, ми отримуємо теореми про коректність постановки початково-крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння з [2], [3] та теорему про оптимальне керування.

Основні позначення та постановка задачі

Розглянемо лінійний оператор

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au + Bu, \tag{1}$$

де $u(x,t)$ – функція, що описує стан системи в області $Q = \Omega \times (0,T)$. Тут Ω – обмежена область в n-вимірному просторі з гладкою межею $\partial\Omega$.

Оператори A та B мають вигляд

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u. \tag{2}$$

$$Bu = \int_0^t \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau) u_{x_i x_i}(x,\tau)d\tau. \tag{3}$$

Вважаємо, що ядра $K_i(t,\tau)$ – неперервні на $[0,T]^2$ та неперервно-диференційовні за змінною τ. Будемо також вважати, що коефіцієнти a_i, b_i, a є неперервними в $\overline{\Omega}$ функціями, а також, що всі функції a_i є строго додатними та відділеними від нуля сталою α.

Шукана функція $u(t,x)$ задовольняє початкові умови

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \tag{4}$$

та крайові умови

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5}$$

Так само, як і в роботах [1] та [2] позначимо через L_0 множину функцій $u(t,x) \in C^\infty(\overline{Q})$, що задовольняють умови

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = ... = 0, \tag{6}$$

а через L_T – множину функцій $v(t,x) \in C^\infty(\overline{Q})$, що задовольняють умови:

$$v|_{t=0} = \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = ... = 0. \tag{7}$$

Простори L_0, L_T будемо вважати областями визначення оператора $\mathcal{L}$ та спряженого оператора $\mathcal{L}^*$, відповідно. Уведемо тепер до розгляду простори: H_0^k, V_0^k, S_0^k, H_T^k, S_T^k,V_T^k, що є поповненнями відповідно L_0, L_T за такими нормами:

$$\|u\|^2_{H_0^k} = \int_Q \left(u^{(k)}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(u_{x_i}^{(k-1)}\right)^2 \, dQ, \tag{8}$$

$$\|u\|^2_{V_0^k} = \|u\|^2_{H_0^k} + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(u_{x_i}^{(k-1)}\right)^2 |_{t=T} \, d\Omega, \tag{9}$$

$$\|u\|^2_{S_0^k} = \|u\|^2_{V_0^k} + \int_\Omega \left(u^{(k)}\right)^2 |_{t=T} \, d\Omega, \tag{10}$$

$$\|v\|^2_{H_T^k} = \int_Q \left(v^{(k)}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(v_{x_i}^{(k-1)}\right)^2 \, dQ, \tag{11}$$

$$\|v\|^2_{V_T^k} = \|v\|^2_{H_T^k} + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(v_{x_i}^{(k-1)}\right)^2 |_{t=0} \, d\Omega, \tag{12}$$

$$\|v\|^2_{S_T^k} = \|v\|^2_{V_T^k} + \int_\Omega \left(v^{(k)}\right)^2 |_{t=0} \, d\Omega. \tag{13}$$

Верхній індекс у виразах $u^{(k)}$ ($v^{(k)}$) тут означає k-ту похідну функції $u(t,x)$ ($v(t,x)$) за змінною t.

Застосовуючи формулу інтегрування частинами і переходячи до поверхневих інтегралів, неважко впевнитися, що для довільних гладких в $\overline{Q}$ функцій $u(t,x) \in L_0$, $v(t,x) \in L_T$, f, що задовольняють рівняння (1), має місце рівність:

$$\begin{aligned} -(u_t, v_t)_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^n \left(a_i u_{x_i}, v_{x_j}\right)_{L_2(Q)} + \\ + \sum_{i=1}^n \left(b_i u_{x_i}, v\right)_{L_2(Q)} + (au, v)_{L_2(Q)} + \\ + \left(B_1 u, v_{x_i}\right)_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \end{aligned} \tag{14}$$

де

$$B_1 = \int_0^t \sum_{i=1}^n K_i(t,\tau) u_{x_i}(x,\tau) d\tau. \tag{15}$$

Ліва частина рівності (14) означена вже для довільних $u \in H_0^1$, $v \in H_T^1$. Це дає можливість розглядати тотожність (14) як визначення нового розширеного оператора $\mathcal{L} : H_0^1 \to (H_T^1)^*$, що означений уже для усіх $u \in H_0^1$. Легко впевнитися, що $\mathcal{L}$ – лінійний оператор.

Основні результати

Для задачі

$$\mathcal{L}u = F, \quad F \in \left(V_T^{-1}\right)^* \tag{16}$$

визначимо її розв'язок $u(x,t) \in H_0^3$ таким чином: **Означення 1.** Функція $u(x,t)$ з простору H_0^3 називається (слабким) розв'язком задачі (16), якщо існує послідовність функцій $u_i(x,t) \in L_0$ така, що

$$\|u - u_i\|_{S_0^2} \to 0, \ \|\mathcal{L}u_i - F\|_{(V_T^{-1})^*} \to 0, \ i \to \infty.$$

Основні результати роботи грунтуються на доведених авторами апріорних нерівностях

$$\begin{cases} c^{-1}\|u\|_{S_0^2} \le \|\mathcal{L}u\|_{(V_T^{-1})^*} \le c_1\|u\|_{H_0^3}; \\ c^{-1}\|v\|_{(S_T^2)^*} \le \|\mathcal{L}^* u\|_{V_0^{-1}} \le c\|v\|_{(H_T^3)^*}. \end{cases} \tag{17}$$

Використовуючи підхід з [4] авторами було отримано такі результати, що стосуються узагальненої розв'язності:

Теорема 1. Для довільного $F \in \left(V_T^{-1}\right)^*$ існує єдиний (слабкий) розв'язок $u(x,t)$ задачі (16).

Теорема 2. Нехай $u(x,t)$ – розв'язок задачі (16), в сенсі означення 1. Тоді справедлива оцінка $\|u\|_{H_0^3} \le c\|F\|_{(V_T^{-1})^*}$.Тут стала c не залежить від F.

Розглянемо тепер задачу оптимального керування

$$\begin{aligned} Lu = f + A(h), \\ J(h) \to \min, \end{aligned} \tag{18}$$

де h – керування з допустимої множини $U_\partial \subseteq H$. У якості оператора A, що визначає керування, розглянемо, наприклад,

$$A_1(h) = \sum_{i=1}^s \delta(t - t_i) \otimes \varphi_i(x), \ h_1 = \{(t_i, \varphi_i)\}_{i=1}^s. \tag{19}$$

Через $H = (\mathbb{R} \times L_2)^s$ позначимо відповідний простір керувань. Використовуючи нерівності (17) та аналогічно до [4] можна довести таке твердження:

Теорема 3. Нехай множина допустимих керувань $U_\partial \subseteq H$ є замкненою, обмеженою, опуклою в H, а критерій якості $J(u) = \Phi(u(h))$ є слабко напівнеперервним знизу за станом системи u. Тоді існує оптимальне керування системою, що описується задачею (18).

Зауваження. Твердження теореми лишається правильним і для інших слабконеперервних операторів керування.

Література

[1] Номіровський Д.А. Траекторно-фінальна керованість гіперболічними системами в різних класах узагальнених функцій / А.В. Анікушин, Д.А. Номіровський // Вісник Київського національного університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2008. – №3. – С. 119-124.

[2] Анікушин А.В. Узагальнена розв'язність гіперболічних інтегро-диференціальних рівнянь / А.В. Анікушин // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2013. – №4. – С. 60-65.

[3] Anikushyn A.V. On a weak solvability of a hyperbolic integro-differential equation / A.V. Anikushyn, H.M. Hranishak // 5-th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky. – Kyiv, 2016. – P.31-33.

[4] Ляшко С.И. Обобщенное управление линейными системами / С.И. Ляшко – Київ: Наукова думка, 1998. – 465 с.