Некоторые подходы к клеточно-автоматному моделированию управляемых процессов

Франжева Е.Д., Дмитришин Д.В.
Одесский Национальный Политехнический Университет
Одесса, Украина

Аннотация—Рассматривается задача моделирования управляемых пространственно-временных процессов в виде их представления клеточными автоматами. Состояние клетки описывается векторной функцией, принимающей значения из некоторого компактного множества. Управление формируется в виде обратной связи и использует информацию о состоянии клеток либо в предшествующие моменты времени, либо прогнозные состояния в будущие моменты времени. Целью таких управлений является пространственная синхронизация клеточного автомата. Приведены примеры.

Ключевые слова–клеточный автомат, нелинейные динамические системы, хаос, запаздывающий контроль, прогнозирующий, синхронизация.

Введение

Многие задачи в физике, биологии, химии, социологии, экономике и др. моделируются с помощью дискретных динамических систем. В таких системах состояние описывается вектором и эволюционирует со временем, которое принимается дискретным. Во многих случаях нужно учитывать пространственную структуру модели системы. Для решения этой проблемы в качестве модели часто используются клеточные автоматы (КА). КА – это специфический случай дискретной динамической системы. КА широко используются для моделирования процессов и систем, так в [1] с помощью КА моделируются транспортные потоки, в [2] распространение эпидемий, использование КА для моделирования ГИС систем [3] и т.д. Традиционно значение состояния клеток ограничено конечным набором состояний, а правила перехода клеток из одного состояния в другое логическими функциями. Однако описание и построение с помощью логических правил достаточно сложных систем затруднительно. Также такое задание КА не позволяет строить системы управления. Для устранения указанных проблем КА задаются в аналитической форме.

Нелинейные дискретные динамические системы, даже без учета пространственной структуры, обладают зачастую сложным поведением. Такие системы могут иметь хаотические аттракторы, содержащие в себе счетное количество неустойчивых циклов. Одним из способов изучения этих аттракторов является построение их скелетов через периодические орбиты с достаточно длинными периодами.

В [4-6] разработаны методы поиска периодических орбит заданного периода. Они основаны на принципе обратной связи, благодаря которой стабилизируются неизвестные периодические орбиты с заданной длиной периода. Применяется обратная связь с запаздыванием и предсказанием. В запаздывающей обратной связи используется информация о состоянии вектора в текущий момент и предшествующие моменты времени. В предсказывающем контроле используется информацию о текущем и спрогнозированном состоянии вектора (спрогнозированное состояние вектора – это состояние вектора динамической системы, которое получается без управления в какие-то будущие моменты времени).

Для того чтобы задать КА в аналитической форме, выбираем в качестве пространства состояний (фазового пространства) векторы, которые являются совокупностью векторов состояний каждой клетки КА. А оператор преобразования фазового пространства в себя будем представлять в виде суперпозиции линейного (уравнение Диффузии) и нелинейного (уравнение Реакции) отображений. К полученной системе можно применить все разработанные ранее схемы управления дискретными системами. В этом случае состояние каждой клетки КА будет периодической векторной функцией или близкой к периодической. Это означает, что пространственная структура КА становится синхронизированной, то есть КА ведет себя как связанная система. Однако визуально (можно графически отобразить динамику соответствующих компонент вектора состояний каждой клетки), если период векторной функции достаточно большой, определить наличие пространственной синхронизации трудно. Другими словами, создается впечатление, что КА функционирует хаотически.

В статье рассматривались модели развития популяции в условиях внутривидовой конкуренции и модель распространения эпидемии. Синхронизация КА в данных примерах означает: в первом случае – устойчивое развитие популяции, во втором случае – первая фаза контроля эпидемии (избежать пандемии).

Модели

Наша цель – представить КА автомат в виде:

$$X_{n+1} = F(X_n), \tag{1}$$

где $X_n = (x_1(n) \quad \dots \quad x_K(n))^T$– вектор, задающий состояние клеток и имеющий размерность K. Вообще говоря, элементы $x_j(n)$ – это векторы заданной размерности L. В [7] для построения системы (1) использовалась суперпозиция линейного и нелинейного преобразований, известное в литературе как Р-Д уравнение (Реакции-Диффузии) [8] . В этом случае систему (1) можно представить в виде:

$$X_{n+1} = \Phi(DX_n), \tag{2}$$

где $\Phi = (\phi_1 \quad \dots \quad \phi_K)^T$ – векторная функция, описывающая изменения состояний клеток, $i = \overline{1,K}$, D – блочная матрица весовых матричных коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} \delta_9 & 0 & \cdots & 0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 & \delta_7 & \delta_8 \\ \delta_8 & \delta_9 & 0 & \cdots & 0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 & \delta_7 \\ & & & & & & \dots & & & & & \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \delta_5 & \delta_6 & \delta_7 & \delta_8 & \delta_9 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь δ_i – матрицы размерности $L \times L$. Для крайних клеток учет соседей, как правило, проводится одним из трех способов: периодическое продолжение, зеркальное отображение и задание краевых условий.

Уравнение диффузии имеет вид:

$$y_i = \sum_{s=1}^{r} \delta_s x_{i+s}(n),\ i = \overline{1,K}, \tag{3}$$

где r – число учитываемых клеток (например, сама клетка и ее соседи), или:

$$Y_n = DY_n. \tag{4}$$

Управляемая система

Рассмотрим нелинейный контроль, который задается по принципу обратной связи, используя информацию о состоянии КА на предыдущих шагах

$$x_{ij}(n+1) = F\left(\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k x_{ij}(n-kT), \sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k y_{ij}(n-kT)\right) \tag{5}$$

где N – глубина предыстории, ε_k – коэффициенты управления, $\varepsilon_k \in [0,1]$, $\sum\limits_{k=0}^{N} \varepsilon_k = 1$, T – период.

Полулинейный контроль имеет вид:

$$\begin{gathered} x_{ij}(n+1) = \\ = (1-\gamma)F\left(\sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k x_{ij}(n-kT), \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k y_{ij}(n-kT)\right) + \\ +\gamma \sum_{k=1}^{N} \tilde{\varepsilon}_k x_{ij}(n-kT+1). \end{gathered} \tag{6}$$

В предикативном контроле используются предсказанные значения при функционировании без управления. В простейшем случае управляемая система имеет вид:

$$x_{ij}(n+1) = F\left(\frac{\theta}{1+\theta} x_{ij}(n) + \frac{1}{1+\theta} f^{(T)}\left(x_{ij}(n)\right)\right), \tag{7}$$

θ выбирается по схеме, представленной в [4], T – цикл.

Примеры и компьютерная визуализация

Рассмотрим систему, описывающую переход клетки из одного состояния в другое:

$$x_{ij}(n+1) = F(x_{ij}(n), y_{ij}(n)), \tag{8}$$

$$y_{ij}(n) = \sum_{k,l=-1}^{1} \mu_{kl}^{(ij)} x_{i+k,j+l}(n), \tag{9}$$

где $x_{ij}(n)$ – состояние клетки, $y_{ij}(n)$ – взвешенное влияние соседей, $\sum\limits_{k,l=-1}^{1} \mu_{kl}^{(ij)} = 1$, $\mu_{kl}^{(ij)} \geq 0$.

С помощью (8) можно построить модель с учетом пространственной структуры (рис. 1):

$$x_{n+1} = 4(1-\alpha y_n)x_n(1-x_n), \tag{10}$$

где $\alpha \in [0,1]$ - коэффициент интенсивности влияния соседей, y_n – функция, определяемая формулой (9), означающая совокупное влияние соседей на скорость роста популяции текущей клетки.

Рис. 1. Визуализация цикла длины 3 для модели (10)

Выводы

В данном исследовании КА задается в аналитической форме, что позволяет применить известные схемы управления дискретными динамическими системами, в результате чего синхронизируется пространственная структура КА.

Список литературы

[1] Петровськúй А.В. Клеточные автоматы в моделировании работы перекрестка / А.А. Петровськúй, С.С. Голощапов // Науковий вісник ХДМІ. – 2010. – Т. 2, №1. – С. 78-83.

[2] Hoya White S. Modeling epidemics using cellular automata / S. Hoya White, A. Martı´n del Rey, G. Rodrı´guez Sa´nchez // Applied Mathematics and Computation. – 2007. – vol. 186. – P 193-202.

[3] Shwu-Ting Lee CA-GIS model for dynamic simulation of commercial activity development by the combination of ANN and Bayesian probability / Shwu-Ting Lee, Chih-Wen Wub, Tsu-Chiang Lei // Procedia Computer Science. – 2013. – vol. 18. – P. 651 – 660.

[4] Dmitrishin D.V. Optimal Search For Nonlinear Discrete Systems Cycles / D.V. Dmitrishin, E.D. Franzheva, I.E. Iacob, A.M. Stokolos // Communications in Applied Analysis. – 2018. – vol. 22, №4. – P. 663-694.

[5] Дмитришин Д.В. Обобщение нелинейного управления для нелинейных дискретных систем / Д. В. Дмитришин, А. М. Стоколос, И. М. Скрынник, Е. Д. Франжева // Вестник НТУ «ХПИ». – 2017. - № 28 (1250). – С. 3-18

[6] Dmitrishin D.V. A new method for finding cycles by semilinear control / D.V. Dmitrishin, G. Lesaja, I.M. Skrinnik, A.M. Stokolos // Physics Letters A 383. – 2019. - vol. A 383, №16. – P. 1871-1878.

[7] Франжева Е.Д. Обобщенные одномерные клеточные автоматы и дискретные динамические системы / Е.Д. Франжева // Електротехнічні та комп'ютерні системи. – 2019. – Т. 106, №30. – С. 187-198.

[8] Лобанов А.И. Модели клеточных автоматов / А.И. Лобанов // Компьютерные исследования и моделирование. – 2010. - Т. 2 № 3. – С. 273–293.