Побудова розв'язків рівнянь з узагальненою похідною із сталим запізненням

Чеповський І.В.
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова
м. Одеса, Україна

Анотація—У роботі розглянуто диференціальне рівняння з узагальненою похідною із сталим запізненням, введено поняття розв'язку, сформульована теорема існування єдиного розв'язку та теорема про неперервну залежність розв'язку рівняння від початкової функції. Також у роботі розроблений числовий алгоритм побудови розв'язку таких рівнянь, наведені приклади роботи цього алгоритму при розв'язанні нелінійних диференціальних рівнянь з узагальненою похідною із запізненням.

Ключові слова–узагальнена похідна, багатозначна система, рівняння, дифференціальні рівняння з запізненням.

Вступ

Розвиток теорії багатозначних відображень призвів до з'ясування питання про те, що розуміти під похідною від багатозначного відображення. Про це йдеться у роботах M. Hukuhara [1], T.F. Bridgland [2], Ю.Н. Тюріна, H.T. Banks, M.Q. Jacobs [3], В.О. Плотнікова, А.В. Плотнікова, Н.В. Скрипник [4-7], А.Н. Вітюка [8], B. Bede, S.G. Gal [9].

У доповіді розглядається диференціальне рівняння з узагальненою похідною із сталим запізненням.

Поняття розв'язку

Розглянемо диференціальне рівняння з узагальненою похідною із сталим запізненням:

$$\begin{aligned} DX \overset{h}{-} \Phi(-\varphi(t)) F_1(t, X(t), X(t-\Delta)) &= \\ = \Phi(\varphi(t)) F_2(t, X(t), X(t-\Delta)), & \\ X(s) = \rho(s), s \in [-\Delta, t_0], & \qquad (1) \end{aligned}$$

де $X(\cdot) : [t_0, T] \to conv(\mathbb{R}^n), t_0 = 0, \Delta > 0$ – стале запізнення, $t \in [t_0, T]$,$F_1, F_2(\cdot,\cdot,\cdot)[t_0, T] \times conv(\mathbb{R}^n) \times conv(\mathbb{R}^n) \to conv(\mathbb{R}^n)$ – багатозначні відображення, $F_1, F_2(\cdot,\cdot,\cdot)[t_0, T] \times conv(\mathbb{R}^n) \times conv(\mathbb{R}^n) \to conv(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(\cdot) : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ – неперервна функція.

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi > 0, \\ 0, & \varphi \le 0. \end{cases}$$

Аналогічно як це було зроблено в [6] для рівнянь без запізнення, введемо наступні означення і поняття.

Означення. Багатозначне відображення $X(\cdot) : [t_0, T] \to conv(\mathbb{R}^n)$ називається розв'язком диференціального рівняння (1), якщо воно неперервне і на будь-якому відрізку $[\tau_i, \tau_{i+1}] \subset [t_0, T]$, де функція $\varphi(\cdot)$ на інтервалі (t_i, t_{i+1}) є знакосталою, задовольняє інтегральне рівняння

$$X(t) + \int_{\tau_i}^{t} \Phi(-\varphi(s)) F_1(s, X(s), X(s-\Delta)) ds =$$

$$= X(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{t} \Phi(\varphi(s)) F_2(s, X(s), X(s-\Delta)) ds.$$

Якщо на інтервалі (τ_i, τ_{i+1}) функція $\varphi(t) > 0$, то $X(\cdot)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$X(t) = X(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{t} F_2(s, X(s), X(s-\Delta)) ds$$

для $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ і $diam(X(t))$ є зростаючою функцією.

Якщо на інтервалі (τ_i, τ_{i+1}) функція $\varphi(t) < 0$, то $X(\cdot)$ задовольняє інтегральне рівняння

$$X(\tau_i) = X(t) + \int_{\tau_i}^{t} F_1(s, X(s), X(s-\Delta)) ds,$$

тобто

$$X(t) = X(\tau_i) \overset{h}{-} \int_{\tau_i}^{t} F_1(s, X(s), X(s-\Delta)) ds$$

для $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ і $diam(X(t))$ є спадною функцією.

Якщо на інтервалі (τ_i, τ_{i+1}) функція $\varphi(t) = 0$, то

$$X(t) = X(\tau_i)$$

для $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ і $diam(X(t))$ є постійною функцією.

Умова існування єдиного розв'язку

Спираючись на [10] сформулюємо наступні теореми:

Теорема 1. F_1 та F_2 – неперервні відображення та в деякому околі точки $(t_0, \rho(t_0), \rho(t_0 - \Delta))$ задовольняють умову Ліпшиця за 2-ою та 3-ою змінними із сталою λ. Нехай початкова функція $\rho(s)$ є неперервною, а запізнення Δ – невід'ємним. Тоді існує єдиний розв'язок $X(t)$ рівняння (1) для $t_0 \le t \le t_0 + \sigma$, де σ – скільки завгодно мале.

Теорема 2. Нехай виконуються всі умови теореми 1. Тоді розв'язок рівняння (1) неперервно у просторі $comp(\mathbb{R}^n)$ залежить від початкової функції та при $h(\rho_1(s), \rho_2(s)) \le \delta$, $\delta > 0$, $s \in [-\Delta; t_0]$ маємо:

$$h(X_1(t), X_2(t)) \le \delta e^{2\lambda(t-t_0)}, t \ge t_0.$$

Числовий алгоритм побудови розв'язку диференціального рівняння з узагальненою похідною із сталим запізненням

Спираючись на означення розв'язку рівняння (1) , теореми 1 і 2 та [11] сформулюємо числовий алгоритм побудови розв'язку диференціального рівняння з узагальненою похідною з запізненням.

Нехай розмірність простору $n = 2$. Запишемо формулу для «ламаної» Ейлера у випадку диференціального рівняння (1).

$$X_m(t) =$$

$$= \begin{cases} X_m(t_k) + (t-t_k) F_2(t_k, X(t_k), X(t_k - \Delta)), & \varphi(t) > 0, \\ X_m(t_k) \overset{h}{-} (t-t_k) F_1(t_k, X(t_k), X(t_k - \Delta)), & \varphi(t) < 0, \\ X_m(t_k), & \varphi(t) = 0. \end{cases}$$

$t \in [t_k, t_{k+1}], k = \overline{0, m-1}, X_m(s) = \rho(s), s \in [-\Delta, t_0]$.

Використовуючи апарат опорних функцій, отримуємо:

$$C(X_m(t_{k+1}), \psi) =$$

$$\begin{cases} C(X_m(t_k), \psi) + \delta C(F_2(t_k, X(t_k), X(t_k - \Delta)), \psi_i), \\ C(X_m(t_k), \psi) - \delta C(F_1(t_k, X(t_k), X(t_k - \Delta)), \psi_i), \\ C(X_m(t_k), \psi_i). \end{cases}$$

при $t = t_{k+1}$, $\psi_i = \begin{pmatrix} cos\gamma_i \\ sin\gamma_i \end{pmatrix}, \gamma_i = \frac{2\pi i}{p}, i = \overline{0, p-1}$.

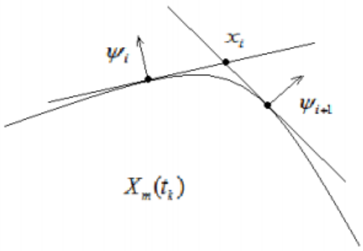

Рис. 1. Побудова граничних точок чисельного наближення опуклої множини

Для побудови апроксимації (рис. 1) знайдемо точки перетину опорних гіперплоскостей до множини $X_m(t_k)$ в напрямках векторів ψ_i і ψ_{i+1}, $i = \overline{0, p-1}$, $\psi_p = \psi_0$:

$$\begin{cases} (x, \psi_i) = C(X_m(t_k), \psi_i), \\ (x, \psi_{i+1}) = C(X_m(t_k), \psi_{i+1}). \end{cases}$$

Це лінійна система відносно невідомого вектора $x \in \mathbb{R}^2$ з визначником

$$\Delta = \begin{pmatrix} cos\gamma_i & sin\gamma_i \\ cos\gamma_{i+1} & sin\gamma_{i+1} \end{pmatrix} = sin(\gamma_{i+1} - \gamma_i) = sin\frac{2\pi}{p} \ne 0.$$

Позначимо розв'язок системи через x_i, $i = \overline{0, p-1}$. Побудуємо багатокутник з вершинами в точках $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$, який позначимо Q_k^p. Критерієм закінчення роботи алгоритму є $\left|\text{area}Q_{k+1}^{p+1} - \text{area}Q_k^p\right| < \varepsilon$, де ε – наперед задане число.

Приклад побудови розв'язків диференціального рівняння з узагальненою похідною із сталим запізненням

Розглянемо рівняння виду:

$$DX \overset{h}{-} \Phi(t-5) \frac{1}{2} X(t-\Delta) =$$
$$= \Phi(5-t) X(t), X(s) = X_0(s), s \in [-\Delta, 0] \qquad (2)$$

де $X_0 = S_{100}\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$, тоді $c(X_0, \psi) = t\psi_2 + 100\left\|\psi\right\|$.

За допомогою пакету Octave мною був побудований розв'язок диференціального рівняння з узагальненою похідною із сталим запізненням з початковою множиною X_0, розбиттям m, кількістю «ламаних» Ейлера p та сталим запізненням Δ на відрізку часу $t \in [0; T]$. Нижче наведений приклад роботи цієї програми.

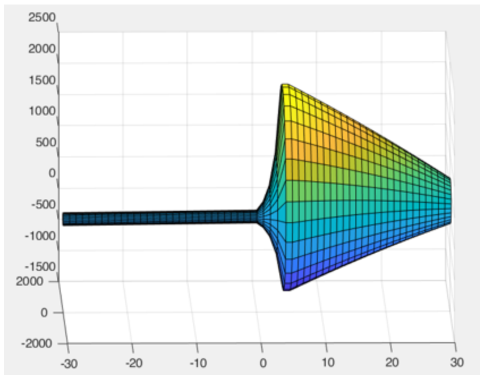

Рис. 2. Графік розв'язку рівняння (2) при $m = 30$, $p = 30$, $\Delta = 30$, $T = 30$

Треба зазначити, що запізнення Δ повинно бути кратним кроку по часу $h = \frac{T-t_0}{m}$.

Висновки

У доповіді сформульовано поняття розв'язку, теореми існування єдиного розв'язку диффеaccording ренціального рівняння з узагальненою похідною із сталим запізненням та про неперервну залежність цього розв'язку від початкової функції, запропонований числовий алгоритм розв'язку таких рівнянь за допомогою «ламаних» Ейлера, приведений приклад роботи цього алгоритму.

Література

[1] Hukuhara M. Integration des applications mesurables don't la valeur est un compact convexe / M. Hukuhara. // Func. Ekvacioj. – 1967. – №10. – C. 205–223.

[2] Bridgland T. F. Trajectory integrals of set valued functions / T. F. Bridgland. // Pacific J. Math. – 1970. – C. 43–68.

[3] Banks H. T. A differential calculus of multifunctions / H. T. Banks, M. Q. Jacobs. // J. Math. Anal. Appl. – 1970. – №29. – C. 246–272.
[4] Plotnikov A. V. Set-valued differential equations with generalized derivative / A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik. // J. Adv. Res. Pure Math.. – 2011. – C. 144–160.
[5] Plotnikov A. V. An existence and uniqueness theorem to the Cauchy problem for generalised set differential equations / A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik. – 2013.
[6] Плотников В. А. Асимптотические методы в задачах оптимального управления / В. А. Плотников. – Одесса: ОГУ, 1976. – 103 с.
[7] Плотников А. В. Условия существования локального решения многозначного дифференциального уравнения с обобщенной производной / А. В. Плотников, Н. В. Скрипник. – 2013.
[8] Витюк А. Н. Дробное дифференцирование многозначных отображений / А. Н. Витюк. // Доповіді НАН України. – 2003. – №10. – С. 75–78.
[9] Bede B. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations / B. Bede, S. G. Gal. // Fuzzy Sets and Systems. – 2005. – №151. – C. 581–599.
[10] Plotnikov V. A. Averaging in differential equations with Hukuhara derivative and delay / V. A. Plotnikov, P. I. Rashkov. // Funct. Different. Equat. (Israel). – 2001. – №8.
[11] Плотников А. В. Дифференциальные уравнения с «четкой» и нечеткой многозначной правой частью: асимптотические методы / А. В. Плотников, Н. В. Скрипник. – Одесса: Астропринт, 2009. – 192 с.